DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les parties I et II du problème sont indépendantes.

PARTIE I

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \geqslant b > 0$. Leur *moyenne arithmético-géométrique* $M(a, b)$ est la limite commune des suites récurrentes $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ définies par :

$$(1) \qquad \begin{cases} a_0 = a & b_0 = b \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

On considère aussi l'intégrale :

$$(2) \qquad I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}.$$

Le but de cette partie du problème est d'étudier les liens entre $M(a, b)$ et $I(a, b)$ et d'en déduire quelques conséquences.

1° Montrer brièvement l'existence de la limite $M(a, b)$.

2° On veut prouver l'égalité $I(a, b) = I(a_1, b_1)$.

Montrer qu'il suffit de prouver la relation (qui sera établie plus loin) :

$$I(1 + k, 1 - k) = I\left(1, \sqrt{1 - k^2}\right)$$

pour tout réel k tel que $0 < k < 1$.

3° Effectuer le changement de variable, pour $k \in]0, 1[$,

$$\varphi = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{(1 + k) \sin \varphi'}{1 + k \sin^2 \varphi'}\right)$$

dans l'intégrale $I(1 + k, 1 - k)$ et en déduire l'égalité :

$$I(1 + k, 1 - k) = I\left(1, \sqrt{1 - k^2}\right).$$

On pourra utiliser sans démonstration les formules :

$$\cos \varphi = \frac{(1 - k^2 \sin^2 \varphi')^{1/2} \cos \varphi'}{1 + k \sin^2 \varphi'}$$

$$\cos \varphi . d\varphi = (1 + k) \frac{1 - k \sin^2 \varphi'}{(1 + k \sin^2 \varphi')^2} \cos \varphi' \, d\varphi'.$$

4° Démontrer la relation :

$$M(a, b) . I(a, b) = \frac{\pi}{2}.$$

5° Démontrer que pour tout réel k, $0 < k < 1$, on a :

$$\frac{1}{M(1 + k, 1 - k)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}$$

et en déduire un développement en série entière de k, de la fonction :

$$k \longrightarrow \frac{1}{M(1 + k, 1 - k)}.$$

6° On considère la lemniscate dont l'équation en coordonnées polaires est :

$$r^2 = \cos 2\theta.$$

Prouver que sa longueur l est donnée par :

$$l = 4 . \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{(\cos 2\theta)^{1/2}}.$$

En utilisant le changement de variable :

$$\varphi = \operatorname{Arccos}((\cos 2\theta)^{1/2}), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$$

Tournez la page S. V. P.

prouver que l'on a :

$$l = 4\,\mathrm{I}(a, b)$$

pour a et b convenablement choisis et en déduire une valeur approchée de l avec 6 décimales exactes.

Partie II

Dans cette partie a et b sont deux nombres complexes et on s'intéresse à toutes les suites que l'on peut former par récurrence de la façon suivante :

$$(4)\qquad \begin{cases} a_0 = a & b_0 = b \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & b_{n+1}^2 = a_n b_n \end{cases}$$

On fait donc à chaque étape un choix de b_{n+1} entre deux possibilités.

1° Examiner toutes les éventualités pour le comportement des suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ si a ou b est nul puis si $a = \pm b$.

Dans toute la suite on supposera que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $a \neq \pm b$.

On dira que l'on a fait un *bon choix* pour b_{n+1} si on a les relations :

$$(5)\qquad |a_{n+1} - b_{n+1}| \leqslant |a_{n+1} + b_{n+1}|$$

et, en cas d'égalité dans (5) :

$$(5')\qquad \mathrm{Im}\left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) > 0 \text{ (où Im désigne la partie imaginaire)}$$

et que l'on a fait un *mauvais choix* dans le cas contraire.

2° Prouver que le bon choix détermine b_{n+1} sans ambiguïté.

On utilisera dans la suite les notations indiquées ci-dessous :

θ_n désigne l'angle non orienté, $0 \leqslant \theta_n \leqslant \pi$, des demi-droites $\overrightarrow{OA_n}$, $\overrightarrow{OB_n}$ (où A_n, B_n sont respectivement les points du plan complexe d'affixes a_n, b_n);

$M_n = \max(|a_n|, |b_n|)$;

$m_n = \min(|a_n|, |b_n|)$.

3° Montrer que le bon choix de b_1 implique :

$$\begin{cases} |a_1 - b_1| \leqslant \dfrac{1}{2}|a - b| \\ \theta_1 \leqslant \dfrac{1}{2}\theta_0 \end{cases}$$

4° Montrer que le mauvais choix de b_1 implique :

$$M_1 \leqslant \frac{3}{4} M_0.$$

5° Quel que soit le choix de b_1, prouver l'inégalité :

$$m_1 \geqslant m_0 \cos\frac{\theta_0}{2}.$$

6° Déduire de ce qui précède les résultats suivants :

Chacun des couples de suites $(\{a_n\}, \{b_n\})$ construit à partir du procédé précédent (comportant une infinité de choix pour les b_n) donne lieu à deux suites convergeant vers la même limite. De plus :

a. Si, à partir d'un certain rang, on fait le bon choix pour b_n, on trouve toujours une limite non nulle.

b. Sinon, on trouve toujours pour limite zéro.

• • •
•